

**Р.В. ПРОТАСОВ**, препод.-стажер каф. ТММ и САПР НТУ „ХПИ”, Харьков;  
**А.В. УСТИНЕНКО**, канд. техн. наук, доц., ст. науч. сотрудник  
 каф. ТММ и САПР НТУ „ХПИ”, Харьков;  
**Г.А. КРОТЕНКО**, канд. техн. наук, науч. сотрудник каф. ТММ и САПР  
 НТУ „ХПИ”, Харьков

### МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕОМЕТРИИ ЭВОЛЮТНЫХ ЗАЦЕПЛЕНИЙ, ИССЛЕДОВАНИЕ ИХ НЕКОТОРЫХ КАЧЕСТВЕННЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ И КОНТАКТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Снижение габаритов зубчатых передач является актуальной задачей современного машиностроения. Получены уравнения рабочего профиля и переходной кривой зубьев эволютной передачи в параметрическом виде. Рассмотрена методика определения приведенного радиуса кривизны и контактных напряжений в эволютном зацеплении. Показано, что в приполюсной зоне имеет место двояковыпуклый контакт, на что указывает теория зацепления. Описана методика определения коэффициента перекрытия для всех типов эволютных прямозубых передач, в том числе и при модификации исходного контура. Проведен сравнительный анализ коэффициента перекрытия для исходного и модифицированного эволютных профилей с аналогичным эвольвентным.

Зниження габаритів зубчастих передач є актуальною задачею сучасного машинобудування. Отримано рівняння робочого профілю та перехідної кривої зубців у параметричному вигляді. Розглянуто методику розрахунку приведенного радіуса кривизни та контактних напружень в еволютних зацепленнях. Виявлено, що в приполюсній зоні має місце двояковыпуклий контакт, на що вказує теорія еволютних зацеплень. Описано методику визначення коефіцієнта перекриття для усіх типів еволютних прямозубих передач, у тому числі і при модифікації вихідного контуру. Наведено порівняльний аналіз коефіцієнта перекриття вихідного та модифікованого профілів з аналогічним евольвентним.

Reduce size of gears is an actual task of the modern machine-building. The equations of working profile and the fillet curve of evolute gear teeth in parametric form are obtained. The method of determining there is relative radius of curvature and contact stress in evolute gearing is shown. It is shown that in approach zone is double-convex teeth contact, as indicated by the theory of gearing. A technique for determining the contact ratio for all types of spur evolute gears, including the modification of the basic rack is presented. A comparative analysis of the contact ratio for the original and modified profiles with the same involute is shown.

**Актуальность задачи.** Известно, что контактную прочность зубчатой передачи можно повысить увеличением ее габаритов или повышая приведенный радиус кривизны (применяя выпукло-вогнутое зацепление).

Первый путь приводит к ухудшению массогабаритных характеристик передач, а второй – является весьма перспективным. Поэтому последние 70 лет ведутся интенсивные работы по созданию новых видов зацеплений с выпукло-вогнутым контактом зубьев. В этом плане отметим эволютные передачи, предложенные А.И. Павловым [1, 2]. В настоящее время довольно подробно рассмотрены методы синтеза исходных контуров и геометрии эволютных зацеплений, однако оценка их качественных показателей и нагрузочной способности выполнена только ориентировочно. Поэтому их подробное исследование является важной научно-практической задачей.

**Построение бокового профиля зуба.** Первым этапом на пути подробного исследования эволютных передач является получение уравнений поверхностей зубьев, что необходимо для 1) исследования качественных показателей зацепления; 2) определения главных кривизн рабочих поверхностей зубьев; 3) построения геометрических и конечно-элементных моделей, необходимых для исследования контактного взаимодействия зубьев и их изгибной прочности, опираясь на возможности современных САЕ-систем.

Исходное уравнение профиля зуба инструментальной рейки записано в отнесенных величинах [1, 2], где  $x_0$  изменяется в пределах от  $-1$  до  $+1$ ,

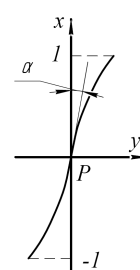


Рис. 1. Профиль рейки в исходной системе координат

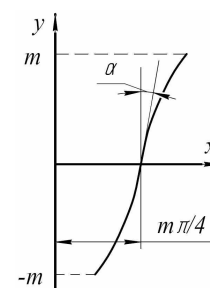


Рис. 2. Профиль рейки в принятой системе координат

$$\left. \begin{aligned} x_0 &\in [-1, 1]; \\ y_0 &= C_1 x_0 + C_2 x_0^2 + C_3 x_0^3 + \dots + C_n x_0^n, \end{aligned} \right\} (1)$$

см. рис. 1. Здесь  $\alpha$  – угол наклона касательной, проведенной из текущей точки исходного контура к вертикальной оси, в данном случае к оси  $x$ .

Преобразуем его в параметрический вид (2), при этом заменим координатные оси на традиционные в абсолютных единицах [3] (рис. 2):

$$\{x_1 = f_1(x_0); y_1 = f_2(x_0)\}. \quad (2)$$

Для построения профиля зуба шестерни по заданному профилю рейки будем использовать метод профильных нормалей [3, 4]. Он устанавливает взаимо-

связь между положением контактной точки на заданном профиле и углом поворота колеса.

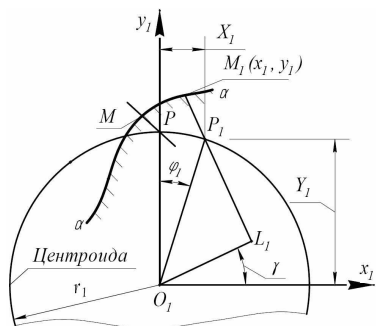


Рис. 3. Метод профильных нормалей

Уравнение нормали в текущей точке профиля имеет следующий вид:

$$(X_1 - x_1) \cos \gamma + (Y_1 - y_1) \sin \gamma = 0. \quad (3)$$

Через  $(x_1, y_1)$  обозначены координаты выбранной точки профиля, а через  $(X_1, Y_1)$  – координаты произвольной точки нормали с центроидой (рис. 3). Угол  $\gamma$  составлен касательной к профилю с осью  $O_1 x_1$ . Для определения угла  $\gamma$  воспользуемся следующей формулой:

$$\operatorname{tg} \gamma = f'_2(x_0) / f'_1(x_0). \quad (4)$$

Величина перемещения рейки  $a$  относительно неподвижной системы координат, в результате которого точка профиля  $(x_1, y_1)$  станет контактной, равна:  $a = y_1 / \operatorname{tg} \gamma + x_1$ .

Для того, чтобы найти уравнения профиля, сопряженного заданному, координаты контактной точки нужно переписать в системе координат, связанной с ведомым колесом. Система

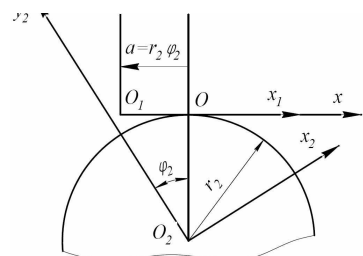


Рис. 4. Применяемые системы координат

координат  $(x_1, y_1)$  связана с инструментальной рейкой, а  $(x_2, y_2)$  – с нарезаемым колесом (рис. 4).

Для определения сопряженного профиля в системе координат  $(x_2, y_2)$ , связанной с центром зубчатого колеса, воспользуемся уравнениями перехода

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= (x_1 - a) \cos \varphi_2 + (y_1 + r_2) \sin \varphi_2; \\ y_2 &= -(x_1 - a) \sin \varphi_2 + (y_1 + r_2) \cos \varphi_2. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

В них  $\varphi_2 = a / r_2$ , где  $r_2$  – радиус центроиды (начальной окружности) второго колеса.

**Уравнения профиля инструментальной рейки и переходной кривой зуба шестерни.** Основным геометрическим элементом, влияющим на изгибную прочность зуба, является переходная кривая, соединяющая рабочий профиль зуба шестерни с диаметром впадин.

Величина радиуса переходной кривой  $\rho_f$  определяется из формулы:  $\rho_f = (m \cdot c^*) / (1 - \sin \alpha_H)$  [5], где  $c^*$  – коэффициент радиального зазора;  $\alpha_H$  – угол, образуемый касательной к рабочему профилю рейки, проведенной из край-

ней нижней точки рабочего профиля  $N$ , имеющей координаты  $N(x_0 = -1, y_0|_{x_0=-1})$ .

Для нахождения угла  $\alpha_H$  воспользуемся уравнением боковой поверхности эволютного зуба рейки (1). Каждому исходному контуру будет соответствовать свой граничный угол, который определяется по формуле:

$$\alpha_H = (\arctg(C_1 + 2C_2 \cdot (-1) + 3C_3 \cdot (-1)^2 + \dots + nC_n \cdot (-1)^{n-1}) \cdot 180 / \pi, \quad (6)$$

следовательно, для обеспечения радиуса закругления  $\rho_f$  коэффициент  $c^*$  также должен варьироваться. Заметим, что корректируя  $c^*$ , можно получить полностью скругленную впадину; это положительно влияет на изгибную прочность зуба. В то же время необходимо учитывать, что уменьшение радиального зазора  $c^*$  может привести к интерференции в зацеплении.

Координаты контактной точки в системе  $(x_1, y_1)$ , где  $L_1$  – расстояние от полюса зацепления системы координат  $(x, y)$  до центра радиуса закругления рейки:

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 &= (L_1 + \rho_f) \cdot \cos \alpha - a + x_H; \\ y_1 &= -(L_1 + \rho_f) \cdot \sin \alpha, \end{aligned} \right. \quad (7)$$

где  $\alpha = \arctg((m - \rho_f \cdot \sin \alpha_H) / a)$ .

Для того чтобы найти координаты точки переходной кривой шестерни, нужно воспользоваться формулами перехода (5), причем  $\varphi_2 = -a / r_2$ ; знак ми-

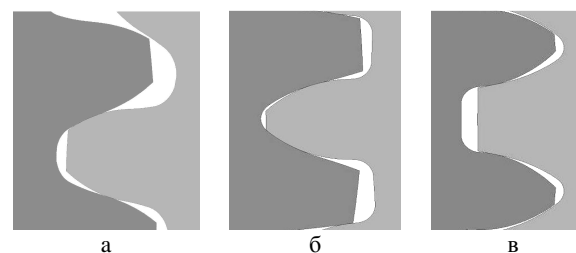


Рис. 5. Боковые профили и переходные кривые шестерни и колеса: а – двустороннее зацепление, б, в – одностороннее зацепление

нус соответствует здесь тому, что направление перемещения  $a$  рейки противоположно направлению перемещения, принятому в работе [4].

На рис. 5 показаны полные профили шестерни и колеса для различных типов эволютных передач.

**Приведенный радиус кривизны.** Является основным геометрическим параметром, влияющим на контактные напряжения.

Для нахождения кривизны профилей использовалась известная формула дифференциальной геометрии (случай параметрического задания кривой) [6, 7]:

$$\chi(x_0) = \frac{y_2''(x_0) \cdot x_2'(x_0) - x_2''(x_0) \cdot y_2'(x_0)}{(x_2'^2(x_0) + y_2'^2(x_0))^{3/2}}. \quad (8)$$

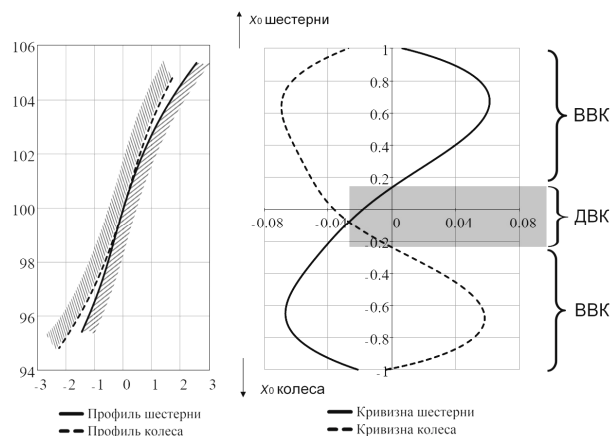


Рис. 6. Рабочие профили шестерни и колеса двустороннего зацепления и их кривизны

На рис. 6 изображены кривизны профилей зубьев шестерни и колеса согласно тому, как они расположены при их контакте в полюсе (для внешнего зацепления). В приплюсненной зоне (рис. 6) и в доплюсненной (рис. 7, 8), величины кривизн имеют одинаковый знак, что соответствует двояковыпуклому контакту (ДВК) с низкой контактной прочностью. Наличие

такого вида контакта подтвердило тезис, ранее приведенный А.И. Павловым в его монографии [1] о том, что в двустороннем эвольвентном зацеплении в районе полюса отсутствует выпукло-вогнутый контакт (ВВК). Величина зоны ДВК двустороннего зацепления по высоте зуба зависит от количества зубьев  $z_1$  и передаточного числа  $u$ . С увеличением числа зубьев высота зоны ДВК заметно снижается (рис. 9). Также зона ДВК двустороннего зацепления зависит от параметров исходного контура  $k$  и  $\alpha$  (рис. 10).

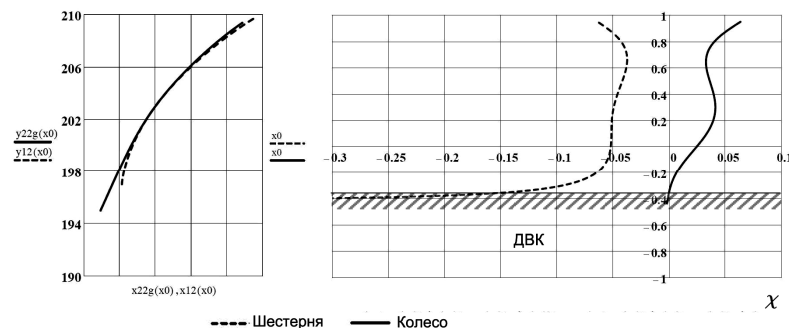


Рис. 7. Рабочие профили шестерни и колеса одностороннего зацепления и их кривизны при выпукло-вогнутом контакте

Расчет приведенного радиуса кривизны по всей высоте зуба выполнен по

зависимости (9) [6, 7]. Знак «+» в знаменателе автоматически учитывает как ВВК, так и ДВК,  $\rho_1, \rho_2$  – радиусы кривизны зуба шестерни и колеса,  $\rho(x_0) = 1/\chi(x_0)$ :

$$\rho_{\text{пр}}(x_0) = |\rho_1(x_0) \cdot \rho_2(x_0) / (\rho_1(x_0) + \rho_2(x_0))|. \quad (9)$$

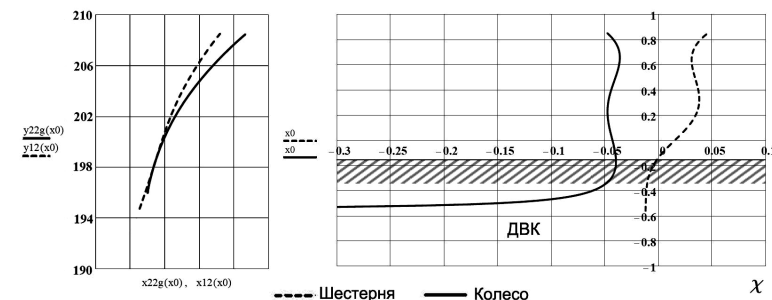


Рис. 8. Рабочие профили шестерни и колеса одностороннего зацепления и их кривизны при вогнуто-выпуклом контакте

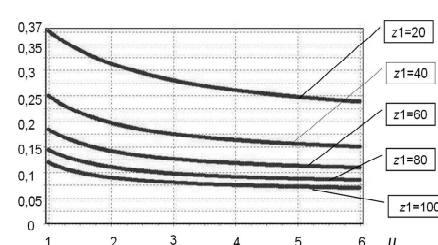


Рис. 9. Высота зоны ДВК двустороннего зацепления относительно рабочей высоты зуба в зависимости от  $u$  и  $z_1$

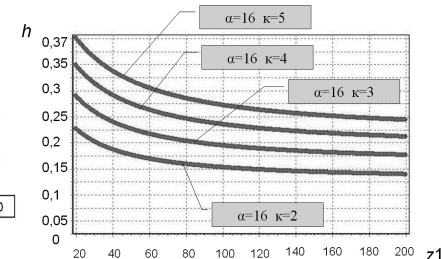


Рис. 10. Высота зоны ДВК двустороннего зацепления относительно рабочей высоты зуба в зависимости от типа исходного контура

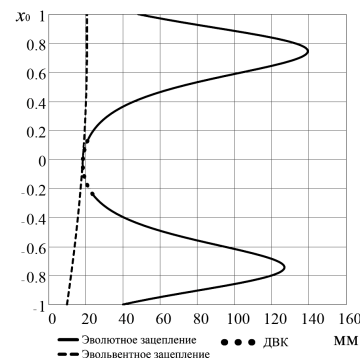


Рис. 11. Приведенный радиус кривизны двустороннего зацепления  $\rho_{\text{пр}}$ , мм

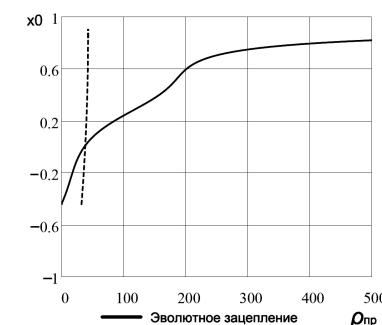


Рис. 12. Приведенный радиус кривизны одностороннего зацепления (контакт выпукло-вогнутый)

На рис. 11–13 показаны графики приведенного радиуса кривизны для трех типов эвольвентных зацеплений со следующими геометрическими параметрами: коэффициент разновидности  $k = 5$ , делительный угол профиля исходного контура  $\alpha = 16^\circ$ , модуль  $m = 5$  мм, число зубьев шестерни  $z_1 = 40$ , передаточное число  $u = 2$ , а также для эвольвентной передачи с такими же параметрами.

**Расчет контактных напряжений.** После определения приведенного радиуса кривизны был выполнен расчет  $\sigma_H$  по формуле Герца

$$\sigma_H = 0,418 \sqrt{(F_n E) / (b_w \rho_{пр})}, \quad (10)$$

и проанализировано, как влияет на их величину изменение  $\rho_{пр}$ .

Исследовалась передача с теми же параметрами, что и при расчете  $\rho_{пр}$ . Дополнительно было принято: крутящий момент на шестерне  $T_1 = 1000$  Н·м, модуль упругости  $E = 2,12 \cdot 10^5$  МПа, ширина венца  $b_w = 100$  мм.

Также был проведен расчет  $\sigma_H$  для эвольвентной передачи с такими же исходными данными. Графики изменения контактных напряжений при перемещении точки приложения нагрузки по высоте зуба в эвольвентном и эвольвентном зацеплениях приведены на рис. 14–16 (случай однопарного зацепления).

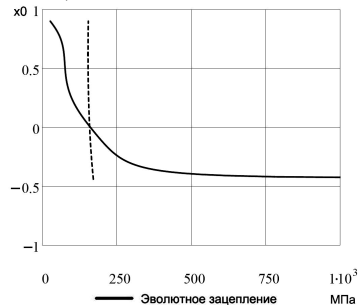


Рис. 15. Контактные напряжения по высоте зуба в односторонней передаче (контакт выпукло-вогнутый)

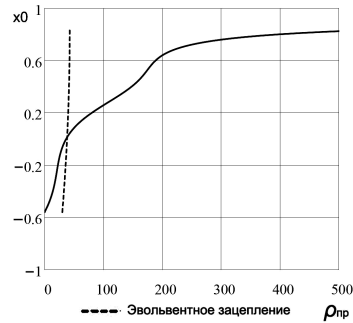


Рис. 13. Приведенный радиус кривизны одностороннего зацепления (контакт вогнуто-выпуклый)

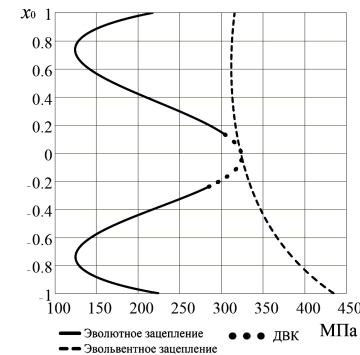


Рис. 14. Контактные напряжения в двусторонней передаче  $\sigma_H$ , МПа по высоте зуба

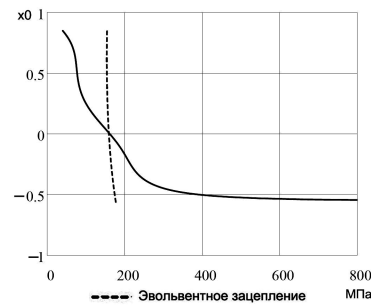


Рис. 16. Контактные напряжения по высоте зуба в односторонней передаче (контакт вогнуто-выпуклый)

**Исследование коэффициента перекрытия.** Рассмотрим положения двух сопряженных профилей в начале и конце зацепления (рис. 17). Отметив начальные ( $a_1$  и  $a_2$ ) и конечные ( $b_1$  и  $b_2$ ) точки зацепления, получим, что за время работы одной пары зубьев точки  $a_1$  и  $a_2$  сопряженных профилей, описав дуги  $\cup a_1 b_1 = \cup a_2 b_2$ , перейдут в положение  $b_1$  и  $b_2$ . Шестерня за это же время повернется на угол  $\psi_\varepsilon$ . Отсюда коэффициент перекрытия зубчатой передачи определим как отношение угла поворота шестерни  $\psi_\varepsilon$  к шагу зацепления  $P_\alpha = 2\pi / z_1$  [8]:  $\varepsilon_\alpha = \psi_\varepsilon / P_\alpha$ .

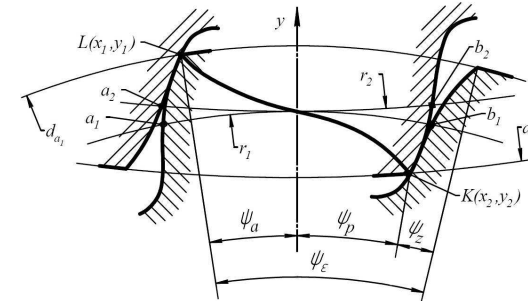


Рис. 17. Определение коэффициента перекрытия в общем случае

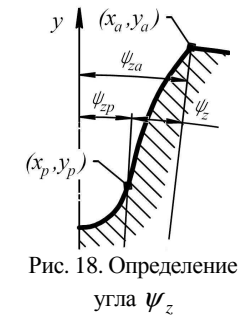


Рис. 18. Определение угла  $\psi_z$

Угол  $\psi_\varepsilon$  состоит из суммы углов:

$$\begin{aligned} \psi_\varepsilon &= (\psi_{za} - \psi_{zp}) + \psi_a + \psi_p = \\ &= (\arctg(x_a / y_a) - \arctg(x_p / y_p)) + \arctg(x_{z1} / y_{z1}) + \arctg(x_{z2} / y_{z2}). \end{aligned} \quad (11)$$

Так как профили зубчатых колес, показанных на рис. 17, ограничены окружностями вершин  $d_{a1}$  и  $d_{a2}$ , то линия зацепления используется только частично. Часть  $LK$  линии зацепления, заключенная между точками пересечения ее с окружностями выступов, является рабочей.

Для нахождения линии зацепления воспользуемся уравнениями [1]:

$$\{x_0 \in [-h_f^*, h_a^*]; y_z(x_0) = (x_0) / y'(x_0)\}. \quad (12)$$

В работе [6] было показано, что в приполюсной зоне двусторонних эвольвентных передач имеется зона двояковыпуклого контакта. От этой зоны предлагалось избавляться путем модификации исходного профиля инструментальной рейки в тело зуба с тем, чтобы в этой зоне не было контакта.

Учтем эту модификацию при расчете коэффициента перекрытия.

На рис. 19 на боковых профилях зубьев штриховой линией показана зона ДВК для общего случая. Точки  $h_{m1}$  и  $h_{m2}$  обозначают начало и конец модифицированного участка [8]. Так как уравнения профилей боковых поверхностей

зубьев записаны в параметрическом виде, то каждой точке  $h_{m_1}$  и  $h_{m_2}$  соответствует определенное значение параметра  $x_0$ . Подставив эти значения в (1) или (5), можно получить участок линии зацепления, ограниченный точками  $z_{m_1}$  и  $z_{m_2}$ , где в связи с модификацией профиля контакт отсутствует.

Угол поворота шестерни, соответствующий модифицированному участку, состоит из суммы углов  $\psi_{m_1}$  и  $\psi_{m_2}$ ; угол  $\psi_{m_1} = \arctg(x_{m_1}/y_{m_1})$ . Аналогично рассчитывается угол  $\psi_{m_2}$ . Тогда формула для коэффициента перекрытия примет вид:

$$\varepsilon_\alpha = [\psi_\varepsilon - (\psi_{m_1} + \psi_{m_2})] / (2\pi / z). \quad (13)$$

На рис. 20–22 показаны графики изменения коэффициента перекрытия эволютной передачи и ее сравнение с аналогичной эвольвентной.

Анализируя эти графики, можно заключить, что коэффициент перекрытия одностороннего эволютного зацепления несколько ниже эвольвентного, однако  $\varepsilon_\alpha > 1$ , а при  $z_1 > 120$   $\varepsilon_\alpha > 2$ .



Рис. 21. Коэффициент перекрытия односторонней эволютной передачи с выпукло-вогнутым и вогнуто-выпуклым контактом

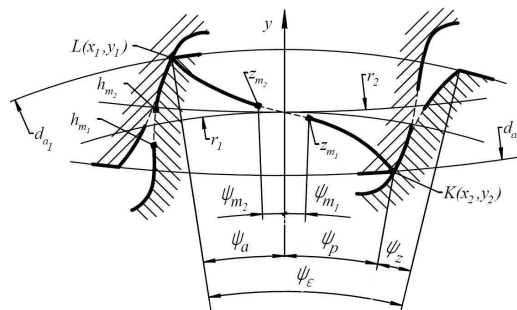


Рис. 19. Определение коэффициента перекрытия в случае модификации профиля двусторонней эволютной передачи

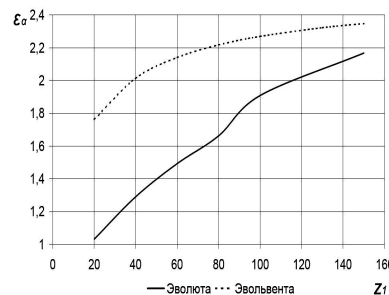


Рис. 20. Коэффициент перекрытия односторонней эволютной передачи и аналогичной эвольвентной (угол зацепления в полюсе  $\alpha = 15,9^\circ$ ,  $u = 1$ )

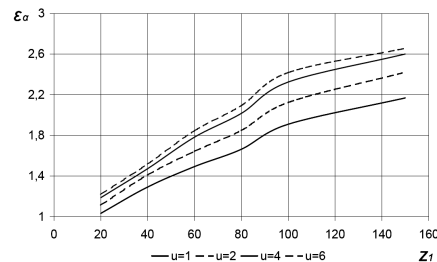


Рис. 22. Коэффициент перекрытия односторонней эволютной передачи при различных передаточных числах

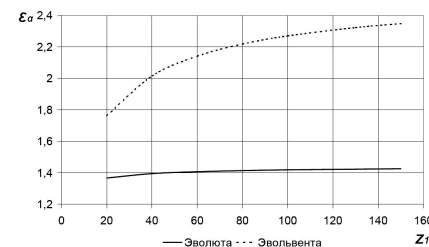


Рис. 23. Коэффициент перекрытия двусторонней эволютной передачи и аналогичной эвольвентной (угол зацепления в полюсе  $\alpha = 15^\circ$ ,  $u = 2$ )

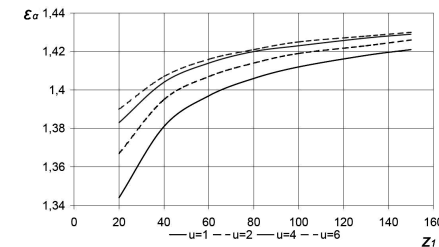


Рис. 24. Коэффициент перекрытия двусторонней эволютной передачи при различных передаточных числах

С изменением передаточного числа  $u$   $\varepsilon_\alpha$  меняется незначительно, что позво-

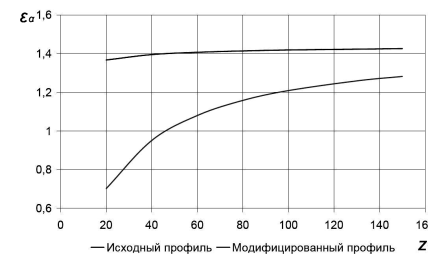


Рис. 25. Коэффициент перекрытия двусторонней эволютной передачи с исходной и модифицированной рейкой

ляет использовать односторонние передачи во всем диапазоне  $u$ . Из графиков на рис. 23, 24 видно, что, коэффициент перекрытия двустороннего зацепления находится в пределах  $\varepsilon_\alpha > 1$ .

Также данный тип зацепления можно применять для широкого диапазона передаточных чисел, но, несмотря на малый угол зацепления в полюсе  $\alpha = 15^\circ$ ,  $\varepsilon_\alpha < 1,5$ .

Анализируя рис. 25, можно заключить, что предлагаемый в работе [6] вари-

ант модификации исходного профиля приводит к неработоспособности передачи, т.к. для ее реализации необходимо, чтобы коэффициент перекрытия был больше 2. Однако двусторонняя эволютная передача может работать и без этой модификации.

**Выводы.** Разработка и исследование эволютных зубчатых передач является перспективной научно-практической задачей, так как позволяет улучшить массогабаритные характеристики зубчатых приводов.

1. На основе метода профильных нормалей получены в общем виде уравнения и построены рабочие профили эволютных зубьев и переходные кривые. Они служат основой для построения геометрических и конечно-элементных моделей с целью исследования прочностных показателей зацепления.

2. По имеющимся уравнениям активного профиля зуба эволютной передачи была определена кривизна зубьев шестерни и колеса.

3. Анализ совместного графика кривизн зубьев шестерни и колеса показывает ДВК в приполюсной зоне, наличие которого предусматривала теория эволютного зацепления. Дальнейшие исследования выявили параметры, влияющие на величину этой зоны.

4. Рассчитаны контактные напряжения при перемещении точки приложения нагрузки по высоте зуба и проведен сравнительный анализ эволютного зацепления с аналогичным эвольвентным.

5. Разработана методика определения коэффициента перекрытия в эволютном зацеплении. Анализ результатов расчета показал неприменимость некоторых типов исходных контуров и параметров передач, а также невозможность провести модификацию исходного контура для двусторонних передач с целью избавления от ДВК в приполлюсной зоне.

**Список литературы:** 1. Павлов А.И. Современная теория зубчатых зацеплений. – Харьков: ХНАДУ, 2005. – 100с. 2. Павлов А.И. Эволютное зацепление и его характеристики // Вестник НТУ "ХПИ". – Харьков, 2003. – Вып.5. – С.103-106. 3. Литвин Ф.Л. Теория зубчатых зацеплений. М.: Наука. – 1968. – 584с. 4. Протасов Р.В., Устиненко А.В. Построение рабочих профилей зубьев эволютных передач // Вестник НТУ "ХПИ": Тем. вып. Машиноведение и САПР. – Харьков, 2010. – №19. – С.124–128. 5. Протасов Р.В., Устиненко А.В. Построение переходной кривой зубьев эволютных передач передач // Вестник НТУ "ХПИ". Тем. вып. Проблемы механического привода. – Харьков, 2010. – №27. – С.148–153. 6. Протасов Р.В. Исследование приведенного радиуса кривизны в эволютных передачах // Вестник НТУ "ХПИ". Тем. вып. Машиноведение и САПР. – Харьков, 2010. – №1. – С.37–43. 7. Протасов Р.В., Устиненко А.В. Исследование приведенного радиуса кривизны и контактных напряжений в односторонних непарных эволютных передачах // Вестник СевНТУ. Тем. вып. Механика, энергетика, экология. – Севастополь, 2011. – №120. – С.64–69. 8. Протасов Р.В., Устиненко А.В. Исследование коэффициента перекрытия эволютных передач // Вестник НТУ "ХПИ". Тем. вып. Проблемы механического привода. – Харьков, 2011. – №29. – С.154–164.

*Поступила в редакцию 17.02.2012*